Оптимізаційні задачі у фармації

Історичні відомості

Проблеми виявлення найкращого серед певної множини варіантів вирішувані. Найкращий варіант називають оптимальним (від лат. optimus – найкращий, досконалий. Щоб визначити оптимальний серед множини різних варіантів, доводиться розв'язувати задачі на знаходження максимуму і мінімуму певних показників, тобто найвищих чи найнижчих значень деяких величин. Обидва ці поняття – максимум і мінімум – об'єднують єдиним терміном «екстремум» (від лат. extremum – крайній). Задачі на знаходження максимум чи мінімум називають екстремальними задачами. Методи дослідження та розв'язування різних типів екстремальних задач становлять основу теорії оптимізації.

З розвитком виробництва в умовах обмеженості земних ресурсів стають актуальними задачі на визначення оптимального використання корисних копалин, енергії, матеріалів, робочого часу, управління фізичними, хімічними, біологічними, технологічними, економічними та іншими складними процесами. До таких задач можна віднести, наприклад:

- ✓ задачі про організацію виробництва ліків з метою отримати максимальний прибуток при заданих обмеженнях на ресурси;
- ✓ організацію перевезення ліків з бази до аптеки з мінімальною сумарною вартістю;
- ✓ раціон харчування;
- ✓ раціональне використання сировини;
- ✓ швидке нагрівання або охолодження металу до заданої температури тощо.

Перші задачі на екстремум з'явилися понад 2500 років тому. Багато істориків вважають найдавнішою серед екстремальних задач задачу Дідони. Фінікійська царівна Дідона, рятуючись від переслідувань свого брата, пішла на захід уздовж берегів Середземного моря шукати собі притулку (згідно з поемою римського поета Вергілія «Енеїда» усе це сталося в IX столітті до нашої ери). На узбережжі Туніської затоки Дідона вела перемовини з місцевим ватажком Ярбом про продаж землі, що їй сподобалась. Попросила вона землі небагато – стільки, скільки можна оточити бичачою шкірою. Царівні вдалося вмовити Ярба. Тоді Дідона порізала шкіру бика на дрібні стрічки, зв'язала їх і оточила велику територію, на якій заснувала фортецю, а біля неї місто – Карфаген. Скільки ж землі можна оточити бичачою шкірою? У сучасному математичному формулюванні ця проблема має такий вигляд: *серед плоских* *замкнених кривих заданої довжини слід знайти криву, яка охоплює найбільшу площу.* Ця задач отримала назву Дідони або класичної ізопериметричної задачі.

Цю проблему досліджували грецькі філософи ще в V столітті до нашої ери. Про неї писав великий Аристотель. Задачі на екстремум зустрічаються ще в «Началах» Евкліда, у творах Архімеда, Герона, Аполлонія та інших античних математиків і філософів. В епоху Відродження (XIV-XVI століття), коли значно активізувалась наукова діяльність, задачі на знаходження екстремумів привертають увагу багатьох вчених. Довгий час (до другої половини XVII століття) не існувало ніяких загальних прийомів розв’язування задач на екстремум. Прагнення їх знайти значною мірою стимулювало розвиток математичного аналізу. Перший загальний метод дослідження задач на екстремум відкрив П.Ферма. Сучасною мовою його можна сформулювати так: *у точці екстремуму деякої функції однієї змінної похідна дорівнює нулю, тому екстремум слід шукати серед коренів похідної.* Фактично Ферма описав цей прийом лише для алгебраїчних багаточленів. У XVIII столітті швейцарський математик, фізик, механік та астроном Леонард Ейлер і французький математик та механік Жозеф Лії Лагранж розробили методи розв’язування екстремальних задач з цільовими функціями від кількох змінних без обмежень на аргументи та з обмеженням за типом рівностей. Основним серед таких методів є метод множників Лагранжа. Пізніше ці дослідження було доповнено методами розв’язування задач, у яких обмеження на аргументи задаються як рівностями, так і нерівностями. До середини 30-х років XX століття більшість учених вважали, що проблематика задач на екстремум практично вичерпана. Усе змінилося коли в 1939 році до професора Л.В.Канторовича прийшли на консультацію представники фанерного тресту і запропонували до його уваги кілька задач, що виникли у них на виробництві. При математичній формалізації з’ясувалося, що це задачі на знаходження екстремуму лінійної функції на множині точок багатогранника. Перебрати всі вершини багатогранника було майже неможливо у зв’язку з їх великою кількістю. Л.В.Канторович дослідив такі задачі та запропонував метод їх розв’язування, заклавши основи нового напряму в теорії екстремальних задач – лінійного програмування. Термін «лінійне програмування» з’явився в середині 40-х років XX століття в працях Т.Ч.Купманса.

Для прикладу сформулюємо в загальному вигляді дві задачі лінійного програмування: транспортну задачу та задачу про оптимальний план виробництва продукції:

Транспортна задача. Нехай запас лікарських засобів перебуває на кількох базах і ці засоби потрібно доставити до кількох аптек. Відомі запаси лікарських засобів на базах, потреби в них кожної аптеки, а також вартість перевезень між базами й аптеками. Необхідно скласти такий план перевезень (вказати, яку кількість лікарських засобів потрібно перевезти з кожної бази до кожної аптеки), щоб сумарна вартість перевезень була мінімальною.

Задача про оптимальний план виробництва продукції. Хіміко-фармацевтичний завод виготовляє продукцію кількох видів. Задано витрати на одиницю продукцію кожного типу, прибуток від її реалізації, обсяг наявних ресурсів та обмеження на обсяг виробництва кожного типу продукції. Необхідно скласти такий план виробництва, який з урахуванням обмежень на ресурси і обсяг випуску кожного типу продукції забезпечував би найбільший загальний прибуток.

Методи лінійного програмування набули широкого застосування на практиці. Зокрема, за розроблення математичних методів та їх упровадження в економіку Л.В.Канторович та американський економіст Т.І.Купманс у 1975 році стали лауреатами Нобелівської премії. Значний внесок у розвиток зазначених напрямів оптимізації зробили також українські вчені В.М.Глушков, В.С.Міхалевич, Ю.М.Єрмольєв, Б.М.Пшеничний, Н.З.Шор та ін... Значна кількість подібних задач виникла в хімічній промисловості, у фармацевтичній галузі тощо.

Постановка задачі оптимізації. Основні поняття

Математичний опис мети, якої слід досягти при розв'язуванні реальної задачі, називають *цільовою функцією Z*, що часто визначають як критерій якості або критерій ефективності. Обмеження, що відтворюють, як правило, дефіцит відповідних ресурсів або умови, за яких відбувається певний процес, визначають деяку множину X значень величин, від яких залежить цільова функція і які задовольняють усі умови задачі.

Екстремальна задача в математичному поданні є задачею обчислення екстремуму (максимуму чи мінімуму) деякої функції Z на деякій множині X. Серед екстремальних задач виділяють задачі мінімізації і задачі максимізації.

Задача про оптимальний план виробництва продукції

Хіміко-фармацевтичний завод виробляє продукцію n видів і для її виготовлення використовується m видів ресурсів. Позначимо через a_{ij} витрати видів ресурсів $(1 \le i \le m)$ на виробництво одиниці продукції j виду $(1 \le j \le n)$, через b_i – наявні ресурси і виду $(1 \le i \le m)$, c_j – прибуток, що одержує підприємство від реалізації одиниці продукції j виду $(1 \le j \le n)$, а через d_j, D_j – задають нижню і верхню межі виробництва j виду продукції.

Потрібно скласти такий план $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ виробництва, що б за наявних ресурсів задовольнити задані обмеження на випуск кожного виду продукції і водночас забезпечити якомога більший загальний прибуток. Математична модель задачі має вигляд

$$f(x) = \sum c_j x_j \to \max \text{ за умови } \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad 1 \le i \le m \\ d_j \le x_j \le D_j, \quad 1 \le j \le n \end{array}$$

Транспортна задача

Запаси лікарських засобів розподілено на кількох базах і ці засоби потрібно доставити до кількох аптек. Відома вартість перевезень засобів між базами й аптеками. Задача полягає в тому, що визначити, яку кількість лікарських засобів потрібно перевезти з кожної бази аптеки, що б забезпечити їх потреби з мінімальними затратами на перевезення. Нехай:

m – кількість баз постачання;

n – кількість аптек;

a_i – кількість одиниць необхідних лікарських засобів на i базі постачання $(1 \le i \le m)$;

b_j – потреба j аптеки $(1 \le j \le n)$ у лікарських засобах (у тих самих одиницях);

c_{ij} – вартість перевезення одиниці лікарських засобів з i бази постачання до j аптеки.

Позначимо x_{ij} – кількість одиниць лікарських засобів, яку заплановано перевезти з i бази постачання до j аптеки. Тоді вартість перевезення препарату становить

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$$

і її потрібно мінімізувати. При цьому на змінні x_{ij} накладають такі обмеження:

$а) x_{ij} \ge 0, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n;$

$б) \sum^{m} x_{ij} = b_j, \quad 1 \le j \le n$ (слід повністю задовольнити потреби всіх аптек);

$в) \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad 1 \le i \le m$ Обсяг продукції, яку вивозять з баз, не повинна перевищувати наявні на них запаси)

Наприклад:

Задача1. В аптеці виготовляють препарати трьох видів (препарат А, препарат В і препарат С) з використанням при виготовленні компонентів трьох видів (компонент І, компонент ІІ і компонент ІІІ):

Компонент	**Препарат А**	**Препарат В**	**Препарат С**
Компонент І, г	20	50	10
Компонент ІІ, г	20	0	40
Компонент ІІІ, г	20	10	10

Вартість виготовлення препаратів однакова і становить 10 грн.
Щодня в аптеку надходить 5 кг компонента І і по 4 кг компонентів ІІ і ІІІ. Потрібно розрахувати оптимальне співвідношення денного виробництва препаратів різного виду, якщо виробничі потужності аптеки дають змогу використати весь запас компонентів, що надійшли і при цьому отримати максимальний прибуток.

Математична модель:

Цільова функція : $\mathbf{Z=10x_1+10x_2+10x_3}$

Наявні обмеження:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{20x_1+50x_2+10x_3\le 5000}\\ \mathbf{20x_1+0x_2+40x_3\le 4000}\\ \mathbf{20x_1+10x_2+10x_3\le 4000}\end{array}\right\}$$

Обмеження означають, що денна витрата компонентів не повинна перевищувати їхні запаси

$\mathbf{x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_1, x_2, x_3}$ – цілі числа } кількість препаратів не може бути від'ємною і не можна реалізувати частину препарату

Команда **Поиск решения** (вкладки **Данные**) Microsoft Excel дає змогу розв'язувати системи рівнянь, задачі лінійної оптимізації.

Щоб скористатися даним сервісом Microsoft Excel слід спочатку підготувати дані на листі робочої таблиці:

1. Зарезервувати для кожної змінної чарунку електронної таблиці ($\mathbf{x_1, x_2, x_3}$).
2. Ввести формули для розрахунку витрат інгредієнтів за видами, підставляючи адреси чарунок $\mathbf{x_1, x_2, x_3}$ у позиції змінних.
3. Ввести в вигляді формули цільову функцію, підставляючи адреси чарунок $\mathbf{x_1, x_2, x_3}$ у позиції змінних.
4. ЛКМ **Данные** - ЛКМ **Поиск Решения**. У вікні діалогу команди слід визначити:

- ✓ адресу чарунки, у якій міститься цільова функція, а також визначити якого значення повинна досягти цільова функція - максимального;
- ✓ адреси чарунок, що змінюються, ці чарунки, які було зарезервовано для змінних $\mathbf{x_1, x_2, x_3}$;
- ✓ в області **Ограничения** добавити обмеження, що визначають яке значення повинно прийняти кожне рівняння чи нерівність – невід'ємність кількості препарату та їх цілі значення;
- ✓ натиснути на кнопку **Выполнить**;

- ✓ ЛКМ по **Сохранить найденное решение –** ЛКМ по **ОК.**
- ✓ **<u>Задача 2.</u>** Вартість перевезення одиниці продукції з урахуванням віддаленості до пункту призначення наведена в таблиці:

Таблиця тарифів та запасів					
Виробники	Тарифи перевезення				**Об'єм виробництва**
	Аптека1	Аптека 2	Аптека 3	Аптека 4	
Виробн. 1	48	80	32	48	**160**
Виробн. 2	96	64	48	64	**400**
Виробн. 3	32	96	32	80	**192**
Виробн. 4	24	32	64	96	**160**
Потреби	**160**	**240**	**192**	**320**	

- ✓ Мінімізувати транспортні витрати по перевозці продукції (розв'язати транспортну задачу).

1. Перевірити, чи є модель транспортної задачі збалансованою (сумарна кількість виробництва = сумарній кількості потреб);
2. Створити ЕТ тарифів перевезення (*без запасів і потреб*);
3. Трохи нижче від створеної таблиці створити таблицю таких самих розмірів (з порожніми комірками – там і буде наш розв'язок);
4. Ввести формули для розрахунку сумарної потреби кожної аптеки. Це і буде перше обмеження;
5. Ввести формули для розрахунку сумарного об'єму виробництва. Це буде друге обмеження.
6. Внести відомі значення потреби в товарі і об'єму виробництва.
7. Ввести формулу цільової функції (=СУММПРОИЗВ(*масив1;масив2*), де *масив1* - вартість одиниці перевезення товару, а *масив2* – невідомі значення транспортних витрат.
8. ЛКМ **Данные-** ЛКМ **Поиск Решения,** заповнюємо діалогове вікно
   - В полі **Установить целевую ячейку** – посилання на цільову функцію;
   - Ставимо перемикач **До: минимум**;
   - В полі **Изменяя ячейки** - посилання на масив значень які шукаємо;
   - В полі **Ограничения:** масив який шукаємо >=0 та цілі числа;
   - «обмеження 1» = об'єму потреб;
   - «обмеження 2» <= об'єму виробництва;
   - ЛКМ **Выполнить;**
   - ЛКМ по **Сохранить найденное решение –** ЛКМ по **ОК.**